Proceedings of IAM, V.14, N.1, 2025, pp.105-124
DOI: 10.30546/2225-0530.14.1.2025.0105

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО И СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Н. Р. Аманова

Бакинский Государственный Униветситет, Баку, Азербайджан
e-mail: amanova.n.93@gmail.com

Абстракт. В статье рассмотрена первая краевая задача для неравномерно и сильно вырожденного эллиптико-параболического уравнения второго порядка в недивергентной форме. Доказана условий типа Кордеса, обеспечивающих однозначную разрешимость первой краевой задачи в соответствующем весовом пространстве Соболева.

Ключевые слова: Наравномерно и сильно вырожденного, эллиптико-параболических уравнений, пространства Соболева

AMS Subject Classification: 35J67, 35J25, 35D40, 35J70.

1. Введение

Пусть E_n и R_{n+1}- евклидовы пространства точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $(x,t)=(x_1,\ldots,x_n,t)$, соответственно, $n\geq 3$, $\Omega\subset E_n$-ограниченная область с границей $\partial\Omega\in C^2$, $0\in\overline{\Omega}$, Q_T - цилиндр $\Omega\times(-T,0)$, где $T\in(0,\infty)$, $\Gamma(Q_T)=\left\{(x,t)\;\middle|\; x\in\Omega,\, t=-T\right\}\cup[-T,0]$- параболическая граница Q_T .

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{ij}+\varphi(0-t)u_{tt}-u_t=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T\,, \tag{1}$$

$$u\,\Big|_{\Gamma(Q_T)}=0\,, \tag{2}$$

предположим, что $\|a_{ij}(x,t)\|$ действительная симметрическая матрица, причем для всех $(x,t)\in Q_T$ и $\xi\in E_n$ выполнено условие

$$\inf_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}=\gamma\,, \tag{3}$$

$$\sigma=\sup_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\cdot\lambda_j(x,t)}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^2\right]-\frac{1}{n-e^2}<0\,, \tag{4}$$

$$\varphi(z)\in C^1[-T,0],\ \varphi(z)\geq 0,\ \varphi'(z)\geq 0,\ \varphi(0)=0\,,$$

$$\varphi'(0)=0,\ \varphi(z)\geq \beta_1 z\varphi'(z),\ \beta_1>0 \text{ - константа.} \qquad (5)$$

Здесь $u=u(x,t)$, $u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}, u_{tt}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, u_{ij}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i,j=1,...,n)$, $\gamma\in(0,1]$ - константа,

$$e=\inf_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Big/\sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}.$$

Всюду в работе предполагается, что

$$\lambda_i(x,t)=\left[\frac{\omega_i^{-1}\left(\rho(x)+\sqrt{|t|}\right)}{\rho(x)+\sqrt{|t|}}\right]^2,\ i=1,...,n,$$

где $\rho(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|)$.

Относительно функций $\omega_i(z)$, $i=1,...,n$ будем предполагать выполнение следующих условий: $\omega_i(z)$- непрерывные и строго монотонно возрастающие на $[0,\operatorname{diam}\Omega]$ функции, $\omega_i(0)=0$, $\omega_i^{-1}(z)$ функции, обратные к $\omega_i(z)$ и кроме того (см. [3,4])

$$\alpha\cdot\omega_i(R)\leq\omega_i(\eta\cdot R)\leq\beta\cdot\omega_i(R),\quad R\in\left(0,\frac{\operatorname{diam}\Omega}{2}\right], \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\omega_i^{-1}(R)}{R}\right)^{q-1}\cdot\int_0^{\omega_i^{-1}(R)}\left(\frac{\omega_i(\tau)}{\tau}\right)^q d\tau\leq A\cdot R,\quad R\in(0,\operatorname{diam}\Omega) \qquad (7)$$

для некоторых $\alpha,\beta\in(1,\infty), \eta>0$ и $q>n$, причем константы A в (7) и α,β,η в (6) не зависят от R. Кроме того, предположим, что элементы матрицы $\|a_{ij}(x,t)\|$ являются измеримыми в Q_T функциями. Условие (4) называется параболическим условием типа Кордеса (см. [2, 5, 6, 7, 10, 14, 21]).

Пусть $x^0\in E_n, R>0, k>0, E_R^{x^0}$ -эллипсоид $\left\{x:\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-x_i^0)^2}{(\omega_i^{-1}(R))^2}<k^2\right\}$, $\Pi_{R:k}(x^0)$- параллелепипед $\left\{x:\left|x_i-x_i^0\right|<k\cdot\omega_i^{-1}(R),\ i=1,...,n\right\}$ и для $t^1<t^2$, $C_{R:k}^{t^1,t^2}(x^0)$-цилиндр $E_R^{x^0}(k)\times(t^1,t^2)$ (или $\Pi_{R:k}(x^0)\times(t^1,t^2)$).

Пусть

$$(x',t')\in\Gamma\left(C_{R:1+\frac{r}{2}}^{-\left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2,0}(0)\right),\ \ c_r=c_r(x',t')=C_{R;r}^{t'-r^2R^2,t'}(x'),$$

$$C'_R = C^{t'-r^2R^2/2,t'}_{R;\frac{r}{2}}(x'), \qquad \overline{E}^{x0}_R(k) \subset \Omega,$$

где R-произвольное фиксированное число из полуинтервала $(0,1]$, а $r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Скажем, что $u \in A(c_r)$, если существует компакт $\overline{K}_u \subset E^{x'}_R(k)$ такой, что $\operatorname{supp} u(x,t) \subset \overline{K}_u \times [t'-r^2R^2, t']$, $u \in C^\infty(\overline{c}_r)$ и $u\big|_{t=t'-r^2R^2} = 0$.

Обозначим через $W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ банахово пространство функций $u(x,t)$, заданных на Q_T, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T}\left(u^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)u_i^2 + u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n \lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)u_{ij}^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi^2(0-t)u_{tt}^2 + 2\varphi(0-t)\cdot\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)u_{it}^2\right)dxdt\right)^{1/2},$$

где $\lambda = (\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_n(x,t))$, $u_{it} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ $(i = 1,\ldots,n)$ и пусть $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$- пополнение множества всех функций $u \in C^\infty(\overline{Q}_T)$, $u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ по норме пространства $W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$.

Функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ называется сильным решением краевой задачи (1)-(2), если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на Q_T. Запись $C(\ldots)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содерженного скобок.

Всюду далее через M_0 и M_ε будем обозначать операторы $L_0 - \mu$ и $L_\varepsilon - \mu$ соответственно (см.[5]), где

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x',t')\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varphi(0-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x',t')\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varphi_\varepsilon(0-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t},$$

$\mu > 0$-константь, $\varepsilon \in (-T,0)$,

$$\varphi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \varphi(z) - \dfrac{\varphi'(\varepsilon)\cdot\varepsilon}{m} + \dfrac{\varphi'(\varepsilon)}{m\cdot\varepsilon^{m-1}}\cdot z^m & \text{при} \quad z \in [-T,\varepsilon), \\ \varphi(z) \quad \text{при} \quad z \in [\varepsilon, 0], \quad m = 2\beta_1^{-1}, \end{cases}$$

и

$$\varphi_\varepsilon(z) \geq \frac{1}{2}\varphi(z). \tag{8}$$

Целью настоящей работы является нахождение условий типа Кордеса, обеспечивающих однозначную разрешимость первой краевой задачи (1)-(2) для класса эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка с неравномерным и сильным вырождением в весовых пространствах Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$.

Первоначально теория вырожденных эллиптико-параболических уравнений исследовалась в работе [6], в которой была получена корректная постановка краевых задач для уравнений вида (1) с одной пространственной переменной. Фикера в [7] установил существование и единственность слабого решения первой краевой задачи для широкого класса уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой [20]. Существование сильного решения первой краевой задачи для некоторых классов эллиптико-параболических уравнений в недивергентной форме было рассмотрена в [9, 13, 17, 19]. Отметим также работы [1, 2, 16, 4, 10, 22], в которых доказано существование и единственность решения первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка в недивергентной форме с разрывными коэффициентами и условиями типа Кордеса. Упомянем работы [17, 9 11, 12, 18], где исследованы вопросы существования слабого решения первой краевой задачи для эллиптико-параболических уравнений в дивергентной форме.

2. Разрешимость первой краевой задачи для равнения $M_0 u = f(x,t)$.

Теорема 9. Пусть функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям (5). Тогда при $T \leq T^0$ первая краевая задача

$$M_0 u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \quad u\Big|_{\Gamma(Q_T)} = 0 \tag{9}$$

имеет единственное сильное решение в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ для любого $f \in L_q(Q_T)$, $n+1 < q < \dfrac{n(n+1)}{n-2}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $f(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T)$. Пусть $\upsilon(x,t)$ классическое решение первой краевой задачи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x',t') \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} - \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = f(x,t) \quad (x,t) \in Q_T, \\ \upsilon \, \Big|_{\Gamma(Q_T)} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что это решение существует, более того, согласно [8] $\upsilon(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,2}(Q_T)$ и

$$\|\upsilon\|_{W_2^{2,2}(Q_T)} \le c_{2.1}(n, \Omega, f). \tag{10}$$

Здесь $W_2^{2,2}(Q_T)$-банахово пространство функций, заданных на Q_T с конечными нормами вида

$$\|u\|_{W_2^{2,2}(Q_T)} = \left(\int_{Q_T} \left(|u|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{ij}|^2 + |u_t|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + |u_{tt}|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |u_{it}|^2 \right) dxdt \right)^{1/2}.$$

В силу того, что $\varphi_\varepsilon(z) \le 1$ при $\varepsilon \in (-T, 0)$, (10) заключаем, что

$$\|\upsilon\|_{W_{2,\varphi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)} \le c_{2.1}. \tag{11}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^{2,2}(Q_T)$ пополнение множество всех функций из $C^\infty(\overline{Q}_T)$, стремящихся к нулю на ∂Q_T, по норме пространства $W_p^{2,2}(Q_T)$ и пусть $u^\varepsilon(x,t)$ сильное (почти всюду) решение задачи Дирихле

$$M_\varepsilon u^\varepsilon = f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_T; \ \ \left(u^\varepsilon(x,t) - \upsilon(x,t)\right) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,2}(Q_T).$$

Согласно [19] такое решение существует для любого $\varepsilon > 0$. Ясно, что $\left(u^\varepsilon(x,t) - \upsilon(x,t)\right) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)$. Учитывая соотношение $\upsilon \, \Big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ и неравенство (1.8) получаем, что $u^\varepsilon(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)$. Кроме того, если $F_\varepsilon(x,t) = M_\varepsilon \upsilon$, то при условии (11) получаем, что

$$\|F_\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} \le c_{2.2}(n, \Omega, f, T). \tag{12}$$

Из теоремы [5, теорема 12] следует, что

$$\|u^\varepsilon - \upsilon\|_{W_{2,\varphi_\varepsilon}^{2,2}(Q_T)} \le c_{2.3} \cdot \left(\ \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|F_\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} \ \right).$$

Тогда из (11), (12) и (1.8) заключаем, что

$$\left\|u^{\varepsilon}\right\|_{W_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)} \leq c_{2.3} \cdot \|u\|_{W_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)} \leq c_{2.4}(\varphi, n, \Omega, f, T). \tag{13}$$

Таким образом, множество функций $\left\{u^{\varepsilon}(x,t)\right\}$ равномерно ограничено относительно по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)$. Поэтому, это множество слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)$. Последнее в частности означает, что существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ и функция $u_0(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)$ такая, что для любого $\psi(x,t) \in C^{\infty}(\overline{Q}_T)$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left(M_0 u^{\varepsilon_k}, \psi\right) = \left(M_0 u_0, \psi\right). \tag{14}$$

Но с другой стороны

$$\begin{aligned}\left(M_0 u^{\varepsilon_k}, \psi\right) &= \left(\left(M_0 - M_{\varepsilon_k}\right) u^{\varepsilon_k}, \psi\right) + \left(M_{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k}, \psi\right) = \\ &= \left(\left(M_0 - M_{\varepsilon_k}\right) u^{\varepsilon_k}, \psi\right) + (f, \psi).\end{aligned} \tag{15}$$

Кроме того, при условиях (1.8) и (13)

$$\begin{gathered} J_k = \left|\left(\left(M_0 - M_{\varepsilon_k}\right) u^{\varepsilon_k}, \psi\right)\right| \leq \left\| \left(\varphi - \varphi_{\varepsilon_k}\right) u_{tt}^{\varepsilon_k}\right\|_{L_2(Q(\varepsilon_k))} \cdot \|\psi\|_{L_2(Q(\varepsilon_k))} \leq \\ \leq 3\left\|u^{\varepsilon_k}\right\|_{W_{2,\varphi_{\varepsilon_k}}^{2,2}(Q_T)} \cdot \|\psi\|_{L_2(Q(\varepsilon_k))} \leq 3c_{2.4} \cdot \|\psi\|_{L_2(Q(\varepsilon_k))}\end{gathered}$$

где $Q(\varepsilon) = \Omega \times (0-\varepsilon, 0)$. Это означает, что

$$\lim_{k\to\infty} J_k = 0. \tag{16}$$

Из (14)-(16) получаем, что $(M_0 u_0, \psi) = (f, \psi)$, т.е. $M_0 u_0 = f(x,t)$ почти всюду в Q_T. Но $\overset{\circ}{W}{}_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T) \subset \overset{\circ}{W}{}_{2,\lambda,\varphi}^{2,2}(Q_T)$, поэтому $\|u_0\|_{W_{2,\lambda,\varphi}^{2,2}(Q_T)} \leq c_{2.5} \cdot \|Lu\|_{L_q(Q_T)}$.

Пусть теперь $f(x,t) \in L_q(Q_T)$, $n+1 < q < \dfrac{n(n+1)}{n-2}$. Тогда существует последовательность $\{f_m(x,t)\}$, $m = 1,2,...$ такая, что $f_m(x,t) \in C^{\infty}(\overline{Q}_T)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L_q(Q_T)} = 0$. Для натурального m рассмотрим последовательность $\{u_m(x,t)\}$ сильных решений первых краевых задач $M_0 u_m = f_m(x,t)$; $(x,t) \in Q_T$, $u_m \big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$. По доказанному выше, функция $u_m(x,t)$ существует для каждого m. Применяя замечание 10 для (см. [5]), заключаем, что

$$\|u_m\|_{W_{2,\lambda,\varphi}^{2,2}(Q_T)} \leq c_{2.1} \cdot \|f_m\|_{L_q(Q_T)} \leq c_{2.6}(\varphi, n, f, \Omega). \tag{17}$$

Таким образом, последовательность $\{u_m(x,t)\}$ слабо компактна в $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$, т.е. существует подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}$, $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$ и функция $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ такие, что для любого $\psi(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T)$, $\lim_{k\to\infty}(M_0\, u_{m_k},\psi)=(M_0 u,\psi)$. Но

$$\lim_{k\to\infty}(M_0\, u_{m_k},\psi)=\lim_{k\to\infty}(f_{m_k},\psi)=(f,\psi).$$

Следовательно, $(M_0\, u,\psi)=(f,\psi)$, т.е. $M_0\, u = f(x,t)$ почти всюду в Q_T. Таким образом, существование сильного решения задачи (9) доказано. Его единственность следует из оценки замечание 10 (см. [5]).

Теорема 9 доказана.

3. Локальная разрешимость первой краевой задачи

Теорема 18. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяет условиям (2)-(5), то при $T\le T^0$ первая краевая задача (1)-(2) имеет единственое решение в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ для любого $f\in L_q(Q_T)$, $n+1<q<n\cdot(n+1)/(n-2)$. К тому же, для решения $u(x,t)$ выполняется следующая оценка:

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \le c_{3.1}(\varphi,\sigma,n,\Omega)\cdot\|f\|_{L_q(\Omega)}. \tag{18}$$

Доказательство. Единственность решения и оценка (18) следуют из [5]. Докажем существование решения задачи (1)-(2). Проведем это доказательство методом продолжения по параметру.

Рассмотрим семейство операторов, зависящих от параметра τ: $L(\tau)=(1-\tau)M_0+\tau L$, $0\le\tau\le 1$, где $M_0 = L_0-\mu$ и L данный оператор.

Докажем, что множество E точек τ резка $[0,1]$, при которых задача

$$L(\tau)u = f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T;\quad u\,\Big|_{\Gamma(Q_T)}=0 \tag{19}$$

разрешима в $W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ при всякой $f\in L_q(Q_T)$, непусто и является одновременно открытым и замкнутым на $[0,1]$. Отсюда будет следовать, что E совпадает с отрезком $[0,1]$, т.е. задача разрешима при $\tau=1$, когда $L(1)=L$.

1. Непустота множества E. При $\tau=0$ мы имеем задачу $M_0 u = f(x,t), (x,t)\in Q_T;\ u\,\Big|_{\Gamma(Q_T)}=0$. Непустота множество E следуем из теоремы 9.

2. Открытость множества E . Пусть при $\tau = \tau_0$ задача (19) разрешима при всякой $f \in L_q(Q_T)$. Пусть $\varepsilon > 0$- число, которое будет подобрано позднее, и $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$.

Представим уравнение $L(\tau)u = f(x,t)$ в виде $L(\tau_0)u = f - [L(\tau) - L(\tau_0)] \cdot u(x,t)$ и будем решать задачу

$$\begin{cases} L(\tau_0)u = f - [L(\tau) - L(\tau_0)] \cdot u(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T) \end{cases} \tag{20}$$

методом последовательных приближений.

Рассмортрим произвольную функцию $\upsilon(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ и первую краевую задачу

$$\begin{cases} L(\tau_0)u = f(x,t) - (L(\tau) - L(\tau_0)) \cdot \upsilon(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T). \end{cases} \tag{21}$$

Ясно, что $(L(\tau) - L(\tau_0))\upsilon(x,t) \in L_q(Q_T)$. Далее, заметим, что для всех операторов $L(\tau)$ условия (2) и (4) выполняются с постоянными $\gamma(\tau) \geq \min(\gamma, n)$ и $\sigma(\tau) \leq \sigma$, соответственно. Из сказанного выше и (см. [5]) следует, что при $T \leq T^0$, $\tau \in [0,1]$ для любой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ выполняется следующая оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \leq c_{3.1} \cdot \|L(\tau)\|_{L_q(Q_T)} . \tag{22}$$

Согласно нашему предположению задача (31) имеет сильное решение $u(x,t)$ для каждого $\upsilon(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$. Обозначим через P оператор, который переводит $\upsilon \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ в $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$, $u = P\upsilon$. Покажем, что оператор P является сжимающим. Пусть $\upsilon^i(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$, $u^i = P\upsilon^i$, $i = 1,2$. Имеем $L(\tau) - L(\tau_0) = (\tau - \tau_0) \cdot (L - M_0)$. Заключаем, что функция $u^1 - u^2$ является сильным решением первой краевой задачи

$$\begin{cases} L(\tau_0)(u^1 - u^2) = (\tau - \tau_0) \cdot (L - M_0)(\upsilon^1 - \upsilon^2), \\ (x,t) \in Q_T; \quad (u^1 - u_0^2) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T). \end{cases}$$

Применяя (22), получаем неравенство

$$\left\| u^1 - u^2 \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \le c_{3.1} \cdot \left\| \left(L - M_0\right)\left(v^1 - v^2\right) \right\|_{L_q(Q_T)} \cdot \left| \tau - \tau_0 \right| .$$

С другой стороны

$$\left\| \left(L - M_0\right)\left(v^1 - v^2\right) \right\|_{L_q(Q_T)} \le c_{3.2}\left(L, n, \Omega, T\right) \left\| \upsilon^1 - \upsilon^2 \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} . \qquad (24)$$

Таким образом

$$\left\| u^1 - u^2 \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \le c_{3.1} \cdot \varepsilon \cdot c_{3.2} \cdot \left\| \upsilon^1 - \upsilon^2 \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} .$$

Теперь, выбирая $\varepsilon = \left(c_{3.1} \cdot 2 \cdot c_{3.2}\right)^{-1}$, доказываем, что оператор P является сжимающим. Следовательно, существует неподвижная точка $u = Pu$, являющаяся сильным решением краевой задачи (20) и следовательно (19). Таким образом, мы доказали, что множество E открыто. Теперь покажем, что E замкнуто.

3. Замкнутость множества E**.** Пусть $\tau_k \in E,\ k = 1,2,...$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \tau$. Для натуральных к обозначим через $u_k(x,t)$ сильное решение первой краевой задачи

$$L(\tau_k)u_k = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \quad u_k \Big|_{\Gamma(Q_T)} = 0 .$$

Согласно (22), имеем неравенство

$$\left\| u_k \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \le c_{3.1} \cdot \left\| f \right\|_{L_q(Q_T)} , \qquad (25)$$

где $n + 1 < q < \dfrac{n(n+1)}{n-2}$.

Таким образом, множество функций $\{u_k(x,t)\}$ слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ т.е. существует подпоследовательность натуральных чисел $\{k_l\}$, $\lim\limits_{l\to\infty} k_l = \infty$ и функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ такие, что для любого $\psi(x,t) \in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$ справедливо соотношение

$$\lim_{l\to\infty} \left(L(\tau_{k_l})u_{k_l}, \psi\right) = \left(L(\tau)u, \psi\right). \qquad (26)$$

Но

$$\left(L(\tau_{k_l})u_{k_l}, \psi\right) = \left(\left(L(\tau) - L(\tau_{k_l})\right)u_{k_l}\, u, \psi\right) + \left(f, \psi\right). \qquad (27)$$

Кроме того, при условии (24) и (25), получаем, что

$$\left| J_1(l) \right| \le \left| \tau - \tau_k \right| \cdot \left| \left(\left(L - M_0\right)u_{k_l}, \psi\right) \right| \le \left| \tau - \tau_{k_l} \right| \cdot c_{3.2} \cdot \left\| u_{k_l} \right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \cdot \left\| \psi \right\|_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le c_{3.1} \cdot c_{3.2} \cdot \left| \tau - \tau_{k_l} \right| \cdot \left\| f \right\|_{L_q(Q_T)} \cdot \left\| \psi \right\|_{L_2(Q_T)} .$$

Из (180) следует, что $\lim_{l\to\infty} J_1(l)=0$. Теперь из (26) и (27) заключаем, что $(L(\tau)u,\psi)=(f,\psi)$ почти всюду в Q_T. Таким образом, мы доказали $L(\tau)u=f$ означает, что $\tau\in E$, т.е. множество E замкнуто .

Теорема доказана.

4. Общая разрешимость первой краевой задачи.

Чтобы доказать существование и единственность сильного решения первой краевой задачи (1)-(2) для любого $T\in(0,\infty)$, придется наложить более строгие условия на функции $\varphi(z)$ и $f(x,t)$. Мы предполагаем, что $f(x,t)\in L_q(Q_T)$, $n+1<q<\dfrac{n(n+1)}{n-2}$ и функция $\varphi(z)$ в отличие от (5), удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{Q_T} \frac{1}{d(x,t)}\left(\frac{\varphi(0-t)}{(0-t)^i}\right)^{n+1} dxdt \le c_{4.i}, \qquad i=1,2 \ . \tag{28}$$

Здесь $d(x,t)=\det\left\|a_{ij}(x,t)\right\|$.

В доказательстве мы используем следующий аналог неравенства Александрова-Бакельмана, полученный в [10, 11]: если условия (2), (5) и (28) выполнены относительно коэффициентов оператора L и функция $u(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ такова, что $Lu(x,t)\in L_{n+1}(Q_T)$ при $T\in(0,\infty)$, то имеет место следующая оценка:

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T)} \le c_{4.3}(L,n,\Omega,T)\|f\|_{L_{n+1}(Q_T)} . \tag{29}$$

Теорема 4.1. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяет условиям (2)-(5). Тогда, если $T\in(0,\infty)$ а $a(n+1)<q<n(n+1)/(n-2)$, то первая краевая задача (1)-(2) однозначно сильно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ при всякой $f(x,t)\in L_q(Q_T)$. При этом для решения $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)} \le c_{4.4}(L,n,\Omega,T)\cdot\|L\|_{L_q(Q_T)} . \tag{30}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему в цилиндре $Q_{T^*}=\Omega\times(-T,-T^*)$ при $T^*=\dfrac{3T^0}{2}$. Далее, за конечное число шагов мы можем решить первую краевую задачу (1)-(2) для любого $T\in(0,\infty)$, так как высота цилиндра, в котором строится решение, увеличивается на $\dfrac{T^0}{2}$ на каждом шаге.

Пусть $R_{n+1} = E_n \times (-\infty, +\infty)$. Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $i, j = 1,...,n$ оператора L продолжены в $CQ_{T^*} = R_{n+1} \setminus Q_{T^*}$ с сохранением условий (2) и (4). Для этого достаточно предположить, что $a_{ij}(x,t) = \frac{\gamma}{n}\delta_{ij}$, $i, j = 1,...,n$ при $(x,t) \in CQ_{T^*}$. Кроме того, продолжим функцию $f(x,t)$ в CQ_{T^*} с нулем.

Обозначим через B_1 единичный $(n+1)$ - мерный шар. Пусть $\omega_1(x,t) \in C_0^\infty(B_1)$, $\omega_1(x,t) \geq 0$ в R_{n+1} и

$$\int\limits_{R_{n+1}} \omega_1(x,t)dxdt = 1, \quad \omega_h(x,t) = \frac{1}{h^{n+1}} \cdot \omega_1\left(\frac{x}{h}, \frac{t}{h}\right).$$

Если $F(x,t) \in L_1^{loc}(R_{n+1})$, то функция

$$F^h(x,t) = \int\limits_{R_{n+1}} F(y,\tau)\omega_h(x-y, t-\tau)dyd\tau$$

называется функцией, усредняющей $F(x,t)$ с параметром h. Пусть далее

$$L_h = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi(0-t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Сначала для достаточно малого h решим задачу

$$\begin{cases} L_h u_h = f^h(x,t), & (x,t) \in Q_{T^*}, \\ u_h \big|_{\Gamma(Q_{T^*})} = 0, \end{cases} \tag{31}$$

применяя альтернирующий метод Шварца (см. [15]). Обозначим $\Omega \times \left(-\frac{3T^0}{2}, -\frac{T^0}{2}\right)$ и $\Omega \times \left(-T, -T^0\right)$ через Q^1 и Q^2 соответственно. Пусть $u'_{h,1}(x,t)$ - строгое решение краевой задачи

$$\begin{cases} L_h u'_{h,1} = f^h(x,t), & (x,t) \in Q^1, \\ u'_{h,1} \big|_{\Gamma(Q^1)} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Ясно, что для оператора L_h условия (2) и (4) выполнены с постоянными γ и σ, соответственно. По теореме 18 сильное решение задачи (32) существует и единственно. Более того, это решение является классическим, так как коэффициенты оператора L_h непрерывно дифференцируемы в $\overline{Q}^1$.

Обозначит через $U''_{h,1}(x,t)$ классическое решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} L_h u''_{h,1} = f^h(x,t), \quad (x,t) \in Q^2, \\ u''_{h,1} \big|_{\Gamma(Q^2)} = 0, \quad u''_{h,1} \big|_{t=-T_0} = u'_{h,1} \big|_{t=-T_0}. \end{cases} \tag{33}$$

Решение задачи (33) существует и единственно согласно [8].

Пусть теперь $u'_{h,2}(x,t)$ и $u''_{h,2}(x,t)$ решения первых краевых задач

$$\begin{cases} L_h u'_{h,2} = f^h(x,t), \quad (x,t) \in Q^1, \\ u'_{h,2} \big|_{S(Q^1)} = 0, \quad u'_{h,2} \big|_{t=-\frac{3T_0}{2}} = u''_{h,1} \big|_{t=-\frac{3T_0}{2}} \end{cases} \tag{34}$$

и

$$\begin{cases} L_h u''_{h,2} = f^h(x,t), \quad (x,t) \in Q^2, \\ u''_{h,2} \big|_{\Gamma(Q^2)} = 0, \quad u''_{h,2} \big|_{t=-T_0} = u'_{h,2} \big|_{t=-T_0} \end{cases} \tag{35}$$

соответственно. Здесь $S(Q^1)$ - боковая поверхность цилиндра Q^1. Сильное решение задачи (34) и (35) существует и единственно согласно к теореме 18, так как $u''_{h,1} \big|_{t=-\frac{3T_0}{2}}$ след некоторой функций из $W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q^1)$ на нижнем основании Q^1.

Действительно, пусть $Q^3 = \Omega \times \left(-T^0, -\dfrac{T^0}{2}\right)$. Тогда в силу гладкости границы $\partial\Omega$ и коэффициентов оператора L_h, функция $u''_{h,1}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{Q}^2$ (см. [21]) и допускает такое продолжение в Q^3, что продолженная функция будет элементом пространства $W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_{T^*})$. Подобные рассуждения о гладкости $\partial\Omega$ и коэффициентов L_h являют заключить, что полученное выше сильное решение задачи (34) и (35) является ее классическим решением.

Продолжим процесс по аналогии. На m ом шаге мы получим классические решения $u'_{h,m}(x,t)$ и $u''_{h,m}(x,t)$ первых краевых задач

$$\begin{cases} L_h u'_{h,m} = f^h(x,t), \quad (x,t) \in Q^1, \\ u'_{h,m} \big|_{S(Q^1)} = 0, \quad u'_{h,m} \big|_{t=-\frac{3T_0}{2}} = u''_{h,m-1} \big|_{t=-\frac{3T_0}{2}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} L_h u''_{h,m} = f^h(x,t), \quad (x,t)\in Q^2, \\ u''_{h,m}\Big|_{\Gamma(Q^2)} = 0, \quad u''_{h,m}\Big|_{t=-T_0} = u'_{h,m}\Big|_{t=-T_0} \end{cases}$$

соответственно. Тогда рассуждая так же, как в [15], получим что существуют пределы $u'_h(x,t)=\lim\limits_{m\to\infty} u'_{h,m}(x,t)$, $(x,t)\in Q^1$; $u''_h(x,t)=\lim\limits_{m\to\infty} u''_{h,m}(x,t)$, $(x,t)\in Q^2$.

К тому же $u'_h(x,t)=u''_h(x,t)$ при $(x,t)\in Q^1\cap Q^2$ и функция

$$u_h(x,t)=\begin{cases} u'_h(x,t), \quad (x,t)\in Q^1, \\ u''_h(x,t), \quad (x,t)\in Q_{T^*}\setminus Q^1 \end{cases}$$

является классическим решением краевой задачи (31).

Пусть теперь $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ число, которое мы выбирает позже.

$$Q^4=\Omega\times\left(\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)T^0,-\frac{T^0}{2}\right), \quad Q^5=\Omega\times\left(-\frac{1+\alpha}{2}T^0,-\frac{T^0}{2}\right).$$

Введем функцию $\xi\in C^\infty\left[\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)T^0,-\frac{T^0}{2}\right]$, такую, что $\xi(t)=1$ при $t\in\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)T^0,-\frac{T^0}{2}\right]$, $\xi(t)=0$ при $t\in\left[\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)T^0,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)T^0\right]$, $0\le\xi(t)\le1$ и

$$|\xi'(t)|\le\frac{c_{4.5}}{\alpha T_0}, \quad |\xi''(t)|\le\frac{c_{4.5}}{(\alpha T_0)^2}. \tag{36}$$

Применяя теорему 11 и 12 из [5] к функции $u_h(x,t)\cdot\xi(t)$ в цилиндре Q^4 и используя оценки (36), получим неравенство

$$\|u_h\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q^5)}\le c_{4.6}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,\alpha,T^0\right)\cdot\|Lu\|^2_{L_2(Q^4)}+$$

$$+c_{4.7}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,\alpha,T^0\right)\cdot\|u_h\|^2_{L_2(Q^4)}+\frac{c_{4.8}\cdot(\varphi,\sigma,n,\Omega)}{\left(\alpha T^0\right)^2}\cdot\|\varphi(u_h)\|^2_{L_2(Q^4)}. \tag{37}$$

Пусть $q_1(T)=\sup\limits_{[-T,0]}\varphi(z)$. Выберем и зафиксируем такое малое $\alpha<\frac{1}{2}$, что $q_1\left(\alpha T^0\right)\cdot\left(\alpha T^0\right)\cdot\sqrt{c_{4.8}}\le\frac{1}{2}$. Ясно, что α зависит только от φ,σ,n,Ω и T^0. Тогда из (37) заключаем

$$\|u_h\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q^5)}\le c_{4.6}\cdot\left\|f^h\right\|^2_{L_2(Q^4)}+c_{4.7}\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\|u_h\|^2_{L_2(Q^4)}+$$

$$+\frac{1}{4}\left\|\left(u_h\right)_t\right\|^2_{L_2\left(Q^4\right)} \le c_{4.6}\cdot\left\|f^h\right\|^2_{L_2\left(Q^4\right)} + c_{4.7}\cdot\left\|u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^4\right)} + \frac{1}{4}\cdot\left\|u\right\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q^4\right)}. \tag{38}$$

Пусть, далее

$$Q^6=\Omega\times\left(-T,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)T^0\right),\quad Q^7=\Omega\times\left(-T,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)T^0\right).$$

Введем функцию $\bar{\xi}(t)\in C^\infty\left[-T,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)T^0\right]$, такую, что $\bar{\xi}(t)=1$ при $t\in\left[-T,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)T^0\right]$, $\xi(t)=0$ при $t\in\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{8}\right)T^0,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)T^0\right]$, $0\le\bar{\xi}(t)\le 1$ и

$$\left|\bar{\xi}'(t)\right|\le\frac{c_{4.9}}{\alpha T_0},\quad \left|\bar{\xi}''(t)\right|\le\frac{c_{4.9}}{\left(\alpha T_0\right)^2}. \tag{39}$$

Ясно, что в цилиндре Q^6 оператор L_h является однородным эллиптическим. Учитывая коэрцитивную оценку, полученную в работе [10], для любой функции $u(x,t)\in C^2\left(\overline{Q}^6\right)$, стремящейся к нулю на ∂Q^6, имеет место следующая оценка:

$$\left\|u_h\right\|^2_{W_2^{2,2}\left(Q^6\right)}\le c_{4.10}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\left(\left\|L_h u\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}+\left\|u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}\right). \tag{40}$$

Применяя неравенство (40) к функции $u(x,t)\cdot\bar{\xi}(t)$ и учитывая, что

$$\left\|u\right\|_{W_{2,\lambda,\varphi}\left(Q^6\right)}\le c_{4.11}\left(\varphi,T^0\right)\cdot\left\|u\right\|_{W_2^{2,2}\left(Q^6\right)},$$

а также оценки (39), получаем неравенство

$$\left\|u_h\right\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q^6\right)}\le c_{4.12}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\left(\left\|L_h u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}+\left\|u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}+\left\|\left(u_h\right)_t\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}\right). \tag{41}$$

По интерполяционному неравенству [8], для любого $\varepsilon>0$

$$\left\|\left(u_h\right)_t\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}\le\varepsilon\left\|\left(u_h\right)_{tt}\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}+\frac{c_{4.13}}{\varepsilon}\left\|u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}. \tag{42}$$

С другой стороны, так как $\inf\limits_{\left[-T,\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)T^0\right]}\varphi\left(T^*-t\right)=\varphi\left(\alpha T^0/4\right)$ имеем

$$\left\|\left(u_h\right)_{tt}\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}\le\varepsilon\cdot c_{4.14}\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\left\|\varphi\left(u_h\right)_{tt}\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}. \tag{43}$$

Выберем и зафиксируем $\varepsilon=\left(4c_{4.14}\cdot c_{4.12}\right)^{-1}$. Тогда из (41) – (43) заключаем

$$\left\|u_h\right\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q^7\right)}\le c_{4.15}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\left(\left\|f^h\right\|_{L_2\left(Q^6\right)}+\left\|u_h\right\|^2_{L_2\left(Q^6\right)}\right)+\frac{1}{4}\left\|u_h\right\|^2_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q^6\right)}. \tag{44}$$

Теперь складывая (38) и (44), получаем

$$\|u_h\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)} \le c_{4.16}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\left(\ \left\|f^h\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}+\|u_h\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}\right). \quad (45)$$

Используя (29) в (45), получаем

$$\|u_h\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)} \le c_{4.17}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\left\|f^h\right\|_{L_{n+1}\left(Q_{T^*}\right)}. \quad (46)$$

В силу того, чито $\left\|f^h\right\|_{L_{n+1}\left(Q_{T^*}\right)} \le 2\cdot\|f\|_{L_{n+1}\left(Q_{T^*}\right)}$, для достаточно малого h неравенство (46) влечет неравенство

$$\|u_h\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)} \le 2c_{4.17}\|f\|_{L_{n+1}\left(Q_{T^*}\right)}. \quad (47)$$

т.е.

$$\|u_h\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)} \le c_{4.18}\cdot\left(\varphi,\sigma,n,\Omega,T^0\right)\cdot\|f\|_{L_q\left(Q_{T^*}\right)}. \quad (48)$$

Таким образом, множество функций $\{u_h(x,t)\}$ слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$. Следовательно, существует последовательность $\{h_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$ и функция $u(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$, такая, что для любых $\psi(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}_{T^*}\right)$

$$\lim_{k\to\infty}\left(Lu_{h_k},\psi\right)=(Lu,\psi). \quad (49)$$

С другой стороны

$$|J_2(k)| \le \left|\left(\left(L-L_{h_k}\right)u_{h_k},\psi\right)\right| \le$$

$$\le c_{4.19}\cdot\sum_{i,\,j=1}^{n}\left\|a_{ij}-a_{ij}^{h_k}\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}\cdot\left\|u_{h_k}\right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)},$$

т.е., при условии (47) – (48)

$$\lim_{k\to\infty} J_2(k)=0. \quad (50)$$

Из (49) и (50) получаем, что $Lu = f(x,t)$ почти всюду в Q_{T^*}. Таким образом, существование сильного решения первой краевой задачи (1)-(2) доказано. Его единственность следует из неравенства (30).

Осталось доказать справедливость оценки (30). Имеем

$$\varliminf_{k\to\infty}\left\|u_{h_k}\right\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)} \le c_{4.18}\cdot\|f\|_{L_q\left(Q_{T^*}\right)}. \quad (51)$$

Из слабой сходимости в $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}(Q_T)$ последовательности $\left\{u_{h_k}\right\}$ при $k\to\infty$ к функции $u(x,t)$ следует, что для любого $\overline{\psi}(x,t)\in L_2\left(\overline{Q}_{T^*}\right)$ и любого $i,\,1\le i\le n$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left(\left(u_{h_k}\right)_i,\overline{\psi}\right)=\left(u_i,\overline{\psi}\right). \quad (52)$$

Зафиксируем произвольное $i, 1 \le i \le n$ и предположим в (52) $\overline{\psi}(x,t) = u_i(x,t)$. Получаем

$$\|u_i\|^2_{L_2\left(Q_{T^*}\right)} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(u_{h_k}\right)_i, u_i\right) \le \|u_i\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)} \cdot \lim_{k\to\infty}\left\|\left(u_{h_k}\right)_i\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)} \le$$

$$\le \|u_i\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)} \cdot \lim_{k\to\infty}\|u_{h_k}\|_{W^{2,2}_{2,\lambda,\varphi}\left(Q_{T^*}\right)}$$

При условии (4.24) имеем неравенство

$$\|u_i\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)} \le c_{4.18} \cdot \|f\|_{L_q\left(Q_{T^*}\right)}.$$

Аналогично можно доказать, что нормы

$$\left\|\sqrt{\lambda_i(x,t)} \cdot u_i\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}, \quad \left\|\sqrt{\lambda_i(x,t) \cdot \lambda_j(x,t)}u_{ij}\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)},$$

$$\left\|\sqrt{\varphi\lambda_i(x,t)} \cdot u_{it}\right\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}, \quad i, j = 1,\ldots,n,$$

$\|u_t\|_{L_q\left(Q_{T^*}\right)}$ и $\|\varphi u_{tt}\|_{L_2\left(Q_{T^*}\right)}$ можорируются величиной $c_{4.18} \cdot \|f\|_{L_q\left(Q_{T^*}\right)}$ и требуемая оценка (30) доказана.

В заключение автор выражает благодарность Ф.И. Мамедову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами. Матем. Сбор., V.131 (173), N.4 (12), (1986), pp.477-500.
2. Аманов Р.А. Об одной теореме вложения с весом. Докл. НАН Азерб., N.5-6, (2002), с.8-15.
3. Аманова Н.Р. Некоторые свойства решений первой краевой задачи для эллиптико-параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, Proceeding of IAM, V.13, N.2, (2024), с. 220-247.
4. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, V.77, N.2, (1951), pp.181-183.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Н., (1967).

6. Мамедов И.Т. Первая краевая задача для эллиптически-параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. Современная математика. Фундаментальные направления, Т.39, (2011), pp.102-129.
7. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка. Математика (сб. перевод ин. статей), Т.7, № 6, (1963), с.99-121.
8. Abbasov N. Yu. On behavion near the boundary of solutions of the second order non-uniformly degenerate parabolic equations. Trans. NAS Azerb., der. PTMS, Math., Mech., V.XII, № 4, (2002), p.7-18.
9. Amanova N.R. On strong solvability of the Dirichlet problem for a class of no uniformly degenerated elliptic equations of second order. Caspian j. of applied Mathematics, ecology and economics, V.5, № 2, (2017), pp.3-25.
10. Cordes H.O. Uber die erste zandweraufgabe bei quasilinearen differentialglichungen zweiter ornung in mehr als zwei variablen. Math Ann., V.131, (1956), pp.278-312.
11. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. V.II, New York, Interscience, (1962).
12. Canfora A. Esistenza ed unicita delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un equazione ellipticо-parabolica di ordine *2m*. Recerche. Math, V.25, (1976), pp.247-304.
13. Fiorito G. Un contributo alla risoluzione del problema di Cauchy-Dirichlet. Matematiche, V.35, 1980, pp.53-70.
14. Franciosi M. Sul di unequazione elliptico-parabolica a coefficienti discontinui. Boll. Un. Mat. Ital, (1986), c.63-75.
15. Hardy G. H., Littlewood I.E. Polya G. Inequalities. Cambridge: Camdridge Univ. press, (1952).
16. Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptico - parabolic equations of second order. Comm. Pure. Appl. Math. (1967), 20, pp.797-872.
17. Mamedov I.T., Guseynov S.T. On week solvability of the first boundary value problem for second order non-uniformly degenerate parabolic equations in divergence form. Proc. IMM. AS Azerb., V.XIII (XXI), (2000), pp.97-104.
18. Mamedov I.T., Salmanova Sh. Yu. On solvability of the firs boundary value problem for the second order degenerate elliptic-parabolic equations. Proc. IMM NAS Azerb., V.15, (2001), pp.132-145.
19. Mamedov F., Amanov R. Regularity of the sulutions of degenerate elliptic equations in divergent form. Math. Notes, V.83, N.1,2, (2008), pp.3–13.
20. Oleinik O.A., Radkevich E.V. Second-order equations with non-negative characteristic form. VINITI, M., (1971).
21. Talanti G. Sopra und classe di equazioni elliptiche a coefficienti misurableili. Ann. Mat. Pura. Appl, V.69, (1965), pp.285-304.

22. Wen G.C., Maoying T. Initial-obtique derivative problems for nonlinear parabolic equations with measurable coefficients. Conim. Nonlinear Sci. Numer. Simul, V.2, (1998), pp.109-113.

FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ORDER NON-DIVERGENT NON-UNIFORMLY AND STRONGLY DEGENERATE ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

N. R. Amanova

Abstract: In the article, the boundary value problem of the first type for non-uniformly and strongly degenerate elliptic-parabolic equations with a non-divergent structure is considered. For the boundary value problem of the first type, the existence of a unique solution iz proven in the weighted Sobolev space under certain conditions of the Kortes type.

Keywords: Non-uniformly and strongly degenerate, elliptic-parabolic equations, Sobolev space.

1. Alhutov YU.A., Mamedov I.T. Pervaya kraevaya zadacha dlya nedivergentnyh parabolicheskih uravnenij 2-go poryadka s razryvnymi koefficientami. Matem. Sbor., V.131 (173), N.4 (12), (1986), pp.477-500.(Alkhutov Yu.A., Mamedov I.T. The first boundary value problem for non-divergence parabolic equations of the second order with discontinuous coefficients. Mat. Sbornik, V.131 (173), N.4 (12), (1986), pp.477-500)
2. Amanov R.A. Ob odnoj teoreme vlozheniya s vesom. Dokl. NAN Azerb., N.5-6, (2002), s.8-15.(Amanov R.A. On one embedding theorem with weight. Dokl. NAS Azerb., N.5-6, (2002), pp.8-15.)
3. Amanova N.R. Nekotorye svojstva reshenij pervoj kraevoj zadachi dlya elliptiko-parabolicheskih uravnenij vtorogo poryadka s razryvnymi koefficientami, Proceeding of IAM, V.13, N.2, (2024), s. 220-247.(Amanova N.R. Some properties of solutions of the first boundary value problem for elliptic-parabolic equations of the second order with discontinuous coefficients, Proceedings of IAM, V.13, N.2, (2024), pp. 220-247.)
4. Keldysh M. V. O nekotoryh sluchayah vyrozhdeniya uravnenij ellipticheskogo tipa na granice oblasti. DAN SSSR, V.77, N.2, (1951), pp.181-183. (Keldysh M.V. On some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of a domain. DAN SSSR, V.77, N.2, (1951), pp.181-183.)
5. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa. M., N., (1967).

(Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. Moscow, N., (1967))

6. Mamedov I.T. Pervaya kraevaya zadacha dlya ellipticheski-parabolicheskih uravnenij vtorogo poryadka s razryvnymi koefficientami. Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya, T.39, (2011), pp.102-129. (Mamedov I.T. The first boundary value problem for second-order elliptic-parabolic equations with discontinuous coefficients. Modern Mathematics. Fundamental Directions, V.39, (2011), pp.102-129.)
7. Fikera G. K edinoj teorii kraevyh zadach dlya elliptiko-parabolicheskih uravnenij 2-go poryadka. Matematika (sb. perevod in. statej), T.7, № 6, (1963), s.99-121. (Fichera G. Towards a unified theory of boundary value problems for second-order elliptic-parabolic equations. Mathematics (collection of translations of foreign articles), V.7, N 6, (1963), pp.99-121.)
8. Abbasov N. Yu. On behavion near the boundary of solutions of the second order non-uniformly degenerate parabolic equations. Trans. NAS Azerb., der. PTMS, Math., Mech., V.XII, № 4, (2002), p.7-18.
9. Amanova N.R. On strong solvability of the Dirichlet problem for a class of no uniformly degenerated elliptic equations of second order. Caspian j. of applied Mathematics, ecology and economics, V.5, № 2, (2017), pp.3-25.
10. Cordes H.O. Uber die erste zandweraufgabe bei quasilinearen differentialglichungen zweiter ornung in mehr als zwei variablen. Math Ann., V.131, (1956), pp.278-312.
11. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. V.II, New York, Interscience, (1962).
12. Canfora A. Esistenza ed unicita delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un equazione elliptico-parabolica di ordine 2m. Recerche. Math, V.25, (1976), pp.247-304.
13. Fiorito G. Un contributo alla risoluzione del problema di Cauchy-Dirichlet. Matematiche, V.35, 1980, pp.53-70.
14. Franciosi M. Sul di unequazione elliptico-parabolica a coefficienti discontinui. Boll. Un. Mat. Ital, (1986), c.63-75.
15. Hardy G. H., Littlewood I.E. Polya G. Inequalities. Cambridge: Camdridge Univ. press, (1952).
16. Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptico - parabolic equations of second order. Comm. Pure. Appl. Math. (1967), 20, pp.797-872.
17. Mamedov I.T., Guseynov S.T. On week solvability of the first boundary value problem for second order non-uniformly degenerate parabolic equations in divergence form. Proc. IMM. AS Azerb., V.XIII (XXI), (2000), pp.97-104.

18. Mamedov I.T., Salmanova Sh. Yu. On solvability of the firs boundary value problem for the second order degenerate elliptic-parabolic equations. Proc. IMM NAS Azerb., V.15, (2001), pp.132-145.
19. Mamedov F., Amanov R. Regularity of the sulutions of degenerate elliptic equations in divergent form. Math. Notes, V.83, N.1,2, (2008), pp.3–13.
20. Oleinik O.A., Radkevich E.V. Second-order equations with non-negative characteristic form. VINITI, M., (1971).
21. Talanti G. Sopra und classe di equazioni ellipticheа a coefficienti misurableili. Ann. Mat. Pura. Appl, V.69, (1965), pp.285-304.